

УДК 537.622, 621.318.12, 621.318.2

## **ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**О. А. Черкасова**

Саратовский государственный университет  
Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83  
E-mail: CherkasovaOA@yandex.ru

В данной работе описаны основные принципы, применяемые при компьютерном моделировании открытых магнитных систем. Представлены результаты расчета картины магнитного поля для теоретической модели магнита с осевой симметрией. Сделан вывод об эффективности применения комплексов программ для решения подобных задач.

*Ключевые слова:* магнитная индукция, магнитное поле, магнит, метод конечных элементов.

### **Research of the Magnetic Field of the Permanent Magnet by Means of Computer Modeling**

**O. A. Cherkasova**

In this work, the basic principles applied at computer modeling of open magnetic systems described. Results of calculation of a picture of a magnetic field for theoretical model of a magnet with axial symmetry presented. The conclusion is drawing on effectiveness of application of complexes of programs for the solution of similar tasks.

*Key words:* magnetic induction, magnetic field, magnet, finite element method.

С начала XX в. и по настоящее время приборостроение является основным потребителем постоянных магнитов. Спрос на магниты породил интенсивные поиски подходящих материалов и разработку методов расчета постоянных магнитов.

Появление редкоземельных магнитных (РЗМ) материалов, имеющих малый объем, приходящийся на единицу энергии, высокое значение коэрцитивной силы по намагниченности и устойчивых к воздействию размагничивающих полей ставят перед конструктором две основные задачи:

1) радикально изменить традиционные конструкции магнитных систем с учетом того, что длина магнита из РЗМ может быть сопоставима с длиной рабочего зазора, а магнит в виде толстой пленки следует размещать в непосредственной близости к рабочему зазору либо в его области;

2) эффективно использовать силы отталкивания магнитов в различных механических устройствах.

Основная задача при проектировании магнитных систем с постоянными магнитами обычно заключается в выборе формы и размеров магнита и

деталей магнитной арматуры (полюсных наконечников, сердечников, ярма и т. п.), обеспечивающих оптимальное соотношение требуемых параметров. В качестве критерия оптимальности служит назначение будущей магнитной системы. Как правило, в качестве такого критерия принимают один или несколько из следующих [1]:

- 1) энергию в рабочем зазоре для измерительных механизмов с подвижными обмотками;
- 2) магнитный момент у измерительных механизмов с подвижным магнитом;
- 3) силу тяги для поляризованных реле, магнитных муфт, редукторов опор и фиксаторов;
- 4) структуру и напряженность поля в рабочем объеме в устройствах магнитной оптики.

Любой постоянный магнит представляет собой источник магнитного поля с распределенными параметрами. Поэтому строгий расчет возможен здесь только по уравнениям теории электромагнитного поля. Однако ввиду трудности применения этих уравнений к расчету магнитных систем сложной формы обычно применяют упрощенные методы либо метод конечных элементов при компьютерном моделировании [2–4].

При расчете магнитных систем измерительных приборов и средств автоматизации наиболее употребительны три основных метода: отношений, размагничивающего фактора, эквивалентного соленоида. Практика показала [2–6], что перечисленные методы удобны для анализа и при выборе наилучшего соотношения параметров дают приемлемую точность. Метод отношений используют при расчете магнитов с арматурой, метод размагничивающего фактора – при расчете магнитов без арматуры в форме брусков и цилиндров, а метод эквивалентного соленоида – при расчете магнитов без арматуры, выполненных из материалов с очень высокими значениями коэрцитивной силы и энергетического произведения.

Расчет магнитной системы независимо от избранного метода требует знания магнитных характеристик применяемых материалов. В связи с этим был выбран материал КС37 [7], из которого впоследствии были спечены магниты по технологии, описанной в работе [8]. Так как целью работы является расчет распределения магнитного поля на поверхности магнита, изготовленного в форме диска из магнитотвердого материала с высокой коэрцитивной силой ( $B_{Hc} \geq 540$  кА/м) и средней величиной магнитного поля ( $B_r \geq 0,7$  Тл), то воспользуемся для анализа методом эквивалентного соленоида.

Метод эквивалентного соленоида основан на возможности рассматривать постоянный магнит как однослойный соленоид, имеющий очень тонкую обмотку, по которой протекает намагничивающий ток  $i$ . Линейная плотность тока при этом должна быть такой, чтобы поле эквивалентного соленоида точно соответствовало полю данного магнита. Условием эквивалентности в данном случае будет являться равенство между магнитными моментами магнита и соленоида.

Как известно [1, 9], магнитный момент соленоида  $P_c$  равен сумме магнитных моментов всех его витков:

$$P_c = w_0 \cdot h \cdot i \cdot S = w_0 \cdot i \cdot V_c, \quad (1)$$

где  $w_0$  – число витков на единицу длины соленоида;  $h$  – длина соленоида;  $S$  – площадь, охватываемая витком;  $V_c$  – объём соленоида.

Магнитный момент  $P_m$  магнита выражается соотношением

$$P_m = V_m \cdot M_m, \quad (2)$$

где  $V_m$  – объём магнита;  $M_m$  – намагниченность магнита.

Так как рассматриваемые модели имеют одинаковый объём, то условием эквивалентности, как было сказано выше, есть равенство соотношений (1) и (2), что позволяет рассматривать линейную плотность тока как намагниченность соленоида. Если предположить, что намагниченность соленоида – величина постоянная, то индукция в разных точках цилиндрического соленоида неодинакова: на концах она меньше, чем в середине, а в центре сечения меньше, чем на периферии. Для расчета индукции, созданной тонким соленоидом в любой точке пространства, можно использовать закон Био–Савара–Лапласа [9], в соответствии с которым элемент проводника  $dl$  с током  $I$  создает на оси эквивалентного соленоида индукцию в точке  $P$ , лежащую на оси  $z$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [dl, \mathbf{r}], \quad (3)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор.

Интегрируя выражение (3) по всей поверхности эквивалентного соленоида (рис. 1), получим выражения, включающие эллиптические интегралы второго рода. Используя стандартные алгоритмы их решения, получим расчетное значение индукции соленоида в общем виде

$$B_c = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot w_0}{2} (\cos \alpha - \cos \beta).$$

Тогда индукция на торце цилиндрического магнита будет определяться соотношением

$$B_T = \frac{\mu_0 \cdot M_m \cdot h}{\sqrt{4h^2 + R^2}},$$

где  $h$  – длина (высота) магнита (соленоида);  $R$  – диаметр магнита.

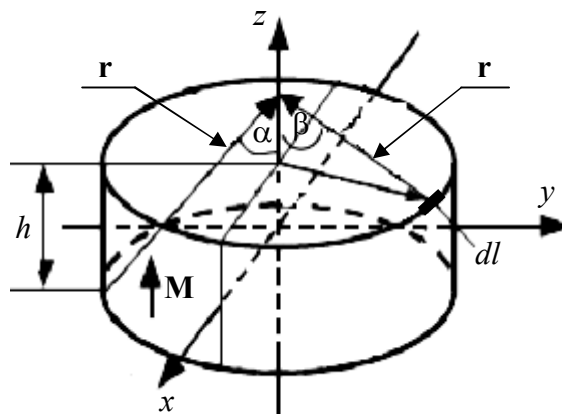


Рис. 1. Эквивалентный соленоид цилиндрического аксиально намагниченного постоянного магнита

За счет использования современных достижений вычислительной техники и математического моделирования появилась возможность рассчитывать магнитные поля численными методами. Большинство способов расчетов относится к случаю работы постоянного магнита на основной кривой размагничивания, где может быть достигнута наибольшая степень использования материала. При этом считается, что магнит намагничен до технического насыщения материала. Большое практическое значение при расчете имеет точность, даваемая им, и его трудоемкость. В этом смысле предпочтение среди численных методов можно отдать методу конечных элементов (МКЭ), так как его ошибка составляет около 7%. Поэтому в данной работе будет использоваться теоретический расчет именно с помощью данного метода.

Высокая эффективность конечно-элементных моделей, возможность на начальной стадии разработки заменить испытания опытных образцов численным экспериментом на компьютере обусловили появление мощных профессиональных программ (ANSYS, COMSOL, ELCUT), реализующих МКЭ и позволяющих рассчитывать сложные электромагнитные и электро-механические процессы в электрических машинах при минимальных допущениях.

При использовании МКЭ в общей постановке задача расчета двумерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных магнитных свойств выбранного материала будет сводиться к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\Delta, \quad (4)$$

где  $A_z$  – составляющая векторного магнитного потенциала по оси  $z$ ;  $\nu = 1/\mu$  – величина, обратная магнитной проницаемости среды.

Сущность МКЭ [10, 11] заключается в замене краевой задачи (4) вариационной, т. е. в разбиении расчетной области на элементы и решении вариационной задачи внутри каждого элемента. Следовательно, уравнение (4) сводится к минимизации нелинейного энергетического функционала:

$$F = \int_{\Omega} \left( \int_0^{B_X} \nu \cdot B_X \cdot dB_X + \int_0^{B_Y} \nu \cdot B_Y \cdot dB_Y \right) \cdot d\Omega - \int_S A_Z \cdot \Delta \cdot d\Omega, \quad (5)$$

где  $\Omega$  – область расчета магнитного поля.

Расчетные уравнения МКЭ получаются в результате минимизации функционала (5) в области  $\Omega$ , которая предварительно разделена на произвольное число, например, треугольных элементов, причем число этих элементов, имеющих общую вершину в одной точке, их размеры и расположение никак не ограничиваются. Эти элементы покрывают всю область расчета магнитного поля и не пересекаются друг с другом.

Если в области  $\Omega$  задано  $n$  вершин  $r$  треугольников и  $F^m$  представляет собой вклад треугольника  $m$  в общий функционал (5), то минимум этого функционала находят, решая систему уравнений

$$\frac{\partial F^m}{\partial A_{zp}} = 0, \quad (6)$$

где  $m = 1, 2, \dots; r p = 1, 2, \dots, n$ .

Дифференцирование по  $A_{zp}$  даст результат, отличный от нуля, только в том случае, если  $p$  является одной из вершин треугольника  $m$  и, следовательно, для каждого треугольника с вершинами  $i, j, k$  можно записать, следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^m}{\partial A_{zi}} &= \frac{\nu}{4 \cdot S_{\Delta}} \cdot \left[ (c_i^2 + b_i^2) \cdot A_{zi} + (c_i \cdot c_j + b_i \cdot b_j) \cdot A_{zj} + \right. \\ &\quad \left. (c_i \cdot c_k + b_i \cdot b_k) \cdot A_{zk} \right] - \Delta \frac{S_{\Delta}}{3}, \\ \frac{\partial F^m}{\partial A_{zj}} &= \frac{\nu}{4 \cdot S_{\Delta}} \cdot \left[ (c_i \cdot c_j + b_i \cdot b_j) \cdot A_{zi} + (c_j^2 + b_j^2) \cdot A_{zj} + \right. \\ &\quad \left. (c_j \cdot c_k + b_j \cdot b_k) \cdot A_{zk} \right] - \Delta \frac{S_{\Delta}}{3}, \quad (7) \\ \frac{\partial F^m}{\partial A_{zk}} &= \frac{\nu}{4 \cdot S_{\Delta}} \cdot \left[ (c_i \cdot c_k + b_i \cdot b_k) \cdot A_{zi} + (c_j \cdot c_k + b_j \cdot b_k) \cdot A_{zj} + \right. \\ &\quad \left. (c_k^2 + b_k^2) \cdot A_{zk} \right] - \Delta \frac{S_{\Delta}}{3}. \end{aligned}$$

На основе выражений (7), записанных для каждого треугольника области  $\Omega$ , образуется система нелинейных алгебраических уравнений (10), решение которой дает значения  $A_z$  в вершинах треугольников. Эти значения  $A_z$  обеспечивают минимум функционалу (5) и, следовательно, являются решением уравнения (4).

Необходимо рассчитать распределение магнитного поля на поверхности постоянного магнита и на некотором расстоянии от нее. Для аналитического расчета использовали программы *Elcut Professional 5.4* и *Maxwell 15.0.0*. Гармонический анализ распределений индукции и обработка результатов моделирования производились в среде *Origin 7.0*.

При построении аналитических решений для распределения магнитных полей вводились следующие допущения: задача решалась в плоской постановке, величина магнитного момента аксиального магнита принималась постоянными  $M_M = \text{const}$ .

В качестве объекта исследования был рассмотрен цилиндрический (дисковый) магнит из сплава КС37 [7] радиусом  $r = 5$  мм и высотой  $h = 5$  мм, с аксиальным намагничиванием вдоль оси  $z$  (см. рис. 1). Прежде чем начать исследование данного магнита, необходимо создать модель, которая будет состоять из опорных точек. После ввода всех опорных точек необходимо соединить их отрезками прямых линий или дугами окружности, для того чтобы модель приняла законченный вид. Так как мы имеем осесимметричный образец, то начало координат будет располагаться в центре нижнего основания цилиндра (см. рис. 1, плоскость  $xу$ ). После того как модель создана, необходимо ввести свойства блоков и граничные условия [11, 12].

Исследуемый образец изготовлен из нелинейного материала [8], следовательно, необходимо ввести не менее 5 точек из кривой  $B(H)$  материала КС37 для получения хорошего результата распределения поля в материале. Для этого воспользуемся данными стандарта [7]. Поскольку программы *Elcut* и *Maxwell* интерполируют между выбранными точками кривой  $B(H)$ , применяя кубические сплайны, то введение меньшего количества точек приведет к линейности кривой  $B(H)$ , так как на кривой имеются области с резкими изменениями ее формы.

Самые распространенные границы магнитных полей – границы, к которым магнитный поток параллелен (т. е. условие Дирихле), и границы, к которым поток перпендикулярен (условия Неймана), поэтому будем считать, что векторный магнитный потенциал постоянен и равен нулю.

Когда свойства модели и граничные условия заданы, можно строить сетку конечных элементов и производить расчет модели. Площадь области расчета составляет  $750 \text{ мм}^2$ , число узлов триангуляционной сетки 210. Распределение во всей области исследования магнитного поля  $B$  представлено на рис. 2. Результаты расчета магнитной составляющей  $B_r$  на торце полюса магнита и на нескольких расстояниях от него представлены на рис. 3.

Изображение 6 кривых, расстояние между которыми 1 мм, можно увидеть на рис. 3. По мере удаления от поверхности магнита магнитная индукция падает и изменяется форма кривой. Исходя из формы кривых можно выявить наиболее однородные участки, на которых нормальная составляющая магнитной индукции будет перпендикулярна торцу магнита, что позволит говорить о равномерности распределения поля в заданной области над поверхностью полюса магнита.

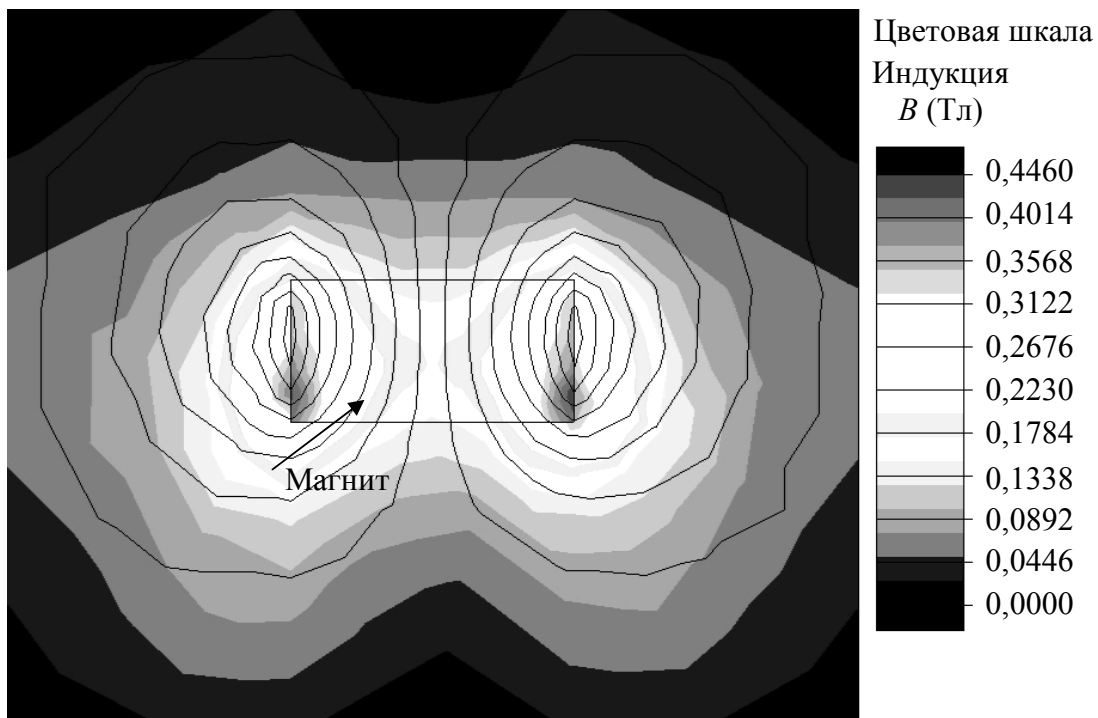


Рис. 2. Распределение магнитного поля  $B$  в постоянном магните

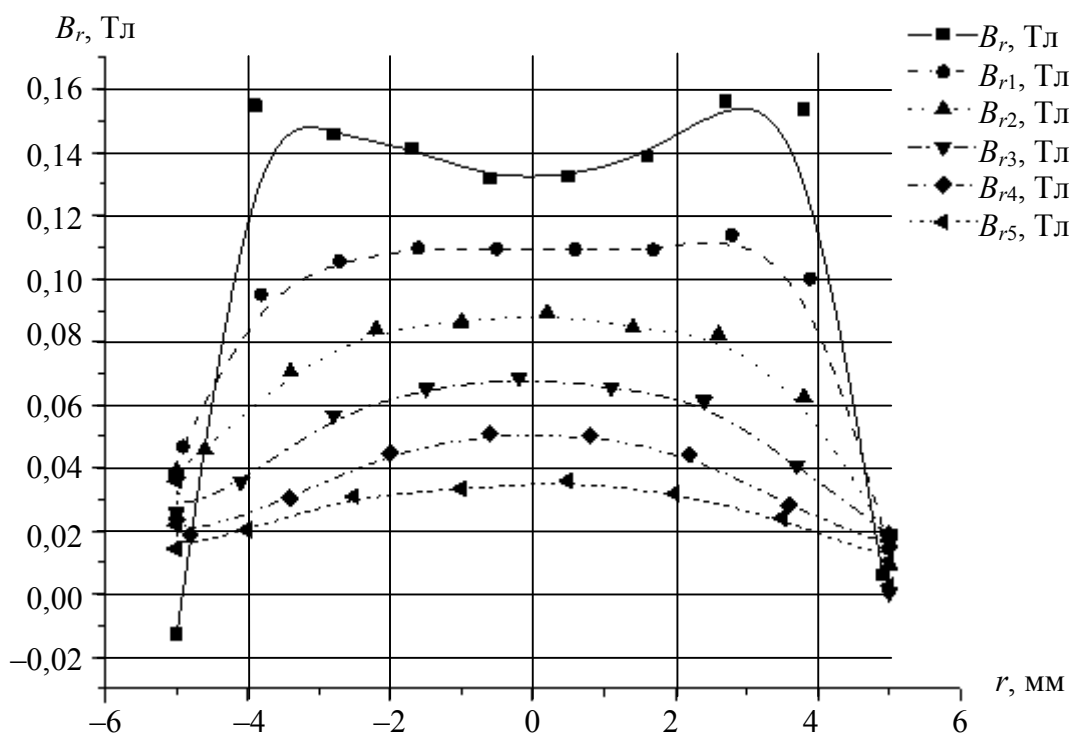


Рис. 3. Аналитическое распределение магнитной индукции  $B_r$  на поверхности постоянного магнита и на расстоянии до 5 мм от нее

В итоге видим, что наиболее однородные области будут наблюдаться на расстоянии 1 и 2 мм (см. рис. 3, кривые  $B_{r1}$  и  $B_{r2}$ ), при этом однородная область будет ограничена радиусом 2 мм. Однако индукция на расстоянии 1 мм составляет 109 мТл, а на расстоянии 2 мм – 84 мТл. В нашем же случае необходимо получить однородность поля при уровне магнитной индукции  $\sim 30$  мТл. С такой индукцией, исходя из рис. 3, подходит лишь 6-я кривая для  $B_{r5}$ , однако область однородности очень мала и составляет 1 мм, что обусловлено отклонением индукционных токов от нормали. Для получения более однородной области необходимо изменить размер моделируемого магнита либо ввести дополнительные элементы в виде термокомпенсаторов или шунтов.

При аналитическом расчете необходимо иметь полную картину размагничивающей ветви петли гистерезиса для нелинейного материала, что позволит более точно определить основные характеристики магнитов. В результате использования двух программ автоматизированного проектирования – отечественной (*Elcut*) и зарубежной (*Maxwell*) – можно сделать еще один немаловажный вывод: результаты расчета магнитного поля исследуемого образца идентичны, что говорит о достоверности расчета с использованием МКЭ.

Рассмотренная система моделирования статических электромагнитных полей *Elcut* и *Maxwell* с использованием метода конечных элементов позволяет повысить навык проектирования и инженерного анализа с различными САЕ (*Computer Aided Engineering*) системами среднего уровня.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Постоянные магниты : справочник / А. Б. Альтман, Э. Е. Верниковский, А. Н. Герберг и др. ; под ред. проф. Ю. М. Мятин. М. : Энергия, 1980. 488 с.
2. Реутов Ю. Я., Пудов В. И. Компьютерный анализатор спектра магнитной индукции // Дефектоскопия. 2003. Вып. 12. С. 67–68.
3. Буль О. Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Программа ANSYS : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М. : Академия, 2006. 288 с.
4. Андреева Е. Г., Татевосян А. А., Семина И. А. Исследование осесимметричной модели магнитной системы открытого типа // Омский науч. вестн. 2010. № 1 (87). С. 110–113.
5. Матюк В. Ф., Осипов А. А., Стрелюхин А. В. Распределение намагниченности вдоль цилиндрического стержня, находящегося в продольном постоянном однородном магнитном поле // Электротехника. 2009. Вып. 8. С. 37–46.
6. Резинкина М. М. Выбор параметров тонких электромагнитных экранов для снижения уровней магнитной индукции // Журн. техн. физики. 2014. Т. 84, № 2. С. 1–7.
7. ГОСТ 21559-76 Материалы магнитотвердые спеченные. Марки, технические требования и методы контроля. М. : ГКС, 1991. 20 с.



8. *Черкасова О. А.* Влияние режимов спекания на магнитные характеристики магнитов из сплава КС37 // Гетеромагнитная микроэлектроника : сб. науч. ст. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15 : Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Методические аспекты физического образования. С. 106–112.

9. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. Т. 3. Электричество. 4-е изд., стереот. М. : ФИЗМАТЛИТ ; Изд-во МФТИ, 2004. 656 с.

10. *Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л.* Метод конечных элементов и САПР. М. : Мир, 1989. 190 с.

11. *Копылов И. П.* Математическое моделирование электрических машин. М. : Высш. шк., 2001. 327 с.

12. *Тун Т. Н.* Применение полевых методов в электромагнитных расчетах электрических машин : автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2010. 21 с.