

**АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ОРБИТ
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ХАОТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА**

В. М. Аникин, А. В. Муштаков

Саратовский государственный университет
Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Аналитически рассчитываются линейная собственная функция оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейного отображения с произвольным наклоном ветвей и автокорреляционная функция орбит данного отображения.

Ключевые слова: хаотическое отображение, оператор Перрона–Фробениуса, собственная функция, автокорреляционная функция орбит.

**Autocorrelation Function of Orbits
of General Piece-wise Linear Chaotic Maps**

V. M. Anikin, A. V. Mushtakov

A chaotic map with piece-wise linear branches having arbitrary slopes is considered. The linear eigenfunction of Perron–Frobenius operator for the map and autocorrelation function of its orbits are analytically calculated.

Key words: chaotic map, Perron–Frobenius operator, eigenfunctions, autocorrelation function of orbits.

Для радиофизических приложений важное значение имеют аналитические расчеты характеристик дискретных динамических систем (хаотических отображений), демонстрирующих хаотическое поведение, в частности корреляционных и автокорреляционных функций. Возможность аналитического (не численного) расчета таких характеристик основана на знании (и предварительном нахождении) аналитических выражений для собственных функций и собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с каждым отображением [1]. В ряде работ (см., например, [2–15]) изучались особенности решения спектральной задачи для этого оператора в случае задающих отображение итеративных функций, обладающих определенной симметрией и регулярностью ветвей.

В статье рассматривается кусочно-линейное отображение более общего вида с произвольным наклоном линейных ветвей (дается математическое представление отображения, записывается оператор Перрона–Фробениуса, находится линейная собственная функция этого оператора и приводится аналитическое выражение для автокорреляционной функции орбит).

Оператор Перрона–Фробениуса кусочно-линейного отображения с произвольным наклоном ветвей

Рассмотрим кусочно-линейное отображение с полными (линейными) ветвями на единичном интервале $(0, 1)$. Ветви могут иметь различный наклон (точнее, различный модуль тангенса угла наклона), иначе говоря, подынтервалы определения ветвей могут быть различны. Границами подынтервалов (на оси абсцисс) являются точки ξ_k (рис. 1).

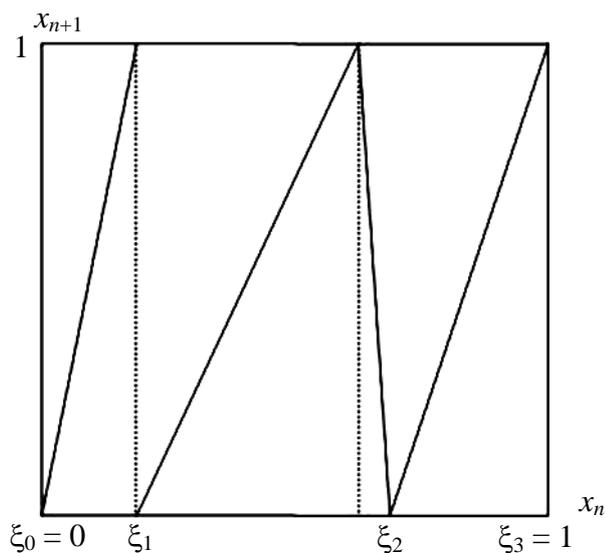


Рис. 1. Кусочно-линейное отображение с полными ветвями и произвольным наклоном ветвей (показан случай четырех ветвей)

Уравнение для m -й ветви отображения можно представить следующей линейной функцией:

$$g_m(x) = a_m x + b_m = \frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta \xi_m} x + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta \xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta \xi_m}, \quad (1)$$

где угловой коэффициент

$$a_m = (-1)^{\sigma_m} / \Delta \xi_m; \quad \sigma_m = \begin{cases} 0, & a_m > 0, \\ 1, & a_m < 0; \end{cases}$$

$$b_m = (\sigma_m - 1) \xi_{m-1} / \Delta \xi_m + \sigma_m \xi_m / \Delta \xi_m; \quad \Delta \xi_m = \xi_m - \xi_{m-1}.$$

Через значение параметра σ_m учитывается наклон ветви: для положительного углового коэффициента $\sigma_m = 0$, для отрицательного $\sigma_m = 1$. Таким образом, итеративную функцию кусочно-линейного отображения, состоящего из p ветвей, с произвольным наклоном кусочно-линейных ветвей можно представить в виде

$$g(x) = \sum_{m=1}^p g_m(x) = \sum_{m=1}^p \left(\frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta \xi_m} x + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta \xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta \xi_m} \right) \Theta_m(x), \quad (2)$$

а кусочно-линейное отображение с произвольным наклоном ветвей запишется как

$$x_{n+1} = \sum_{m=1}^p \left(\frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta \xi_m} x_n + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta \xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta \xi_m} \right) \Theta_m(x), \quad (3)$$

где $\Theta_m(x)$ – индикаторная (характеристическая) функция отрезка (ξ_{m-1}, ξ_m) , равная единице внутри него и нулю за его пределами.

Запишем оператор Перрона–Фробениуса для отображения (3), исходя из определения оператора [1]:

$$Pf(x) = \int_0^1 f(t) \delta(x - g(t)) dt, \quad (4)$$

где $f(x)$ – функция, на которую действует оператор P ; $\delta(u)$ – дельта-функция. Получим

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \int_0^1 f(t) \delta \left(x - \sum_{m=1}^p \left(\frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta \xi_m} t + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta \xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta \xi_m} \right) \Theta_m(t) \right) dt = \\ &= \sum_{m=1}^p \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m} f(t) \delta \left(x - \left(\frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta \xi_m} t + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta \xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta \xi_m} \right) \right) \Theta_m(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы воспользоваться фильтрующим свойством дельта-функции при интегрировании, проведем замену переменных в интегралах (5) по правилам:

$$u = \frac{(-1)^{\sigma_m}}{\Delta\xi_m} t + (\sigma_m - 1) \frac{\xi_{m-1}}{\Delta\xi_m} + \sigma_m \frac{\xi_m}{\Delta\xi_m},$$

$$t = (-1)^{-\sigma_m} (\Delta\xi_m u - (\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m),$$

$$dt = (-1)^{-\sigma_m} \Delta\xi_m du.$$

Введение новых переменных позволяет во всех интегралах, входящих в выражение (5), перейти к интегрированию на интервале (0, 1). Это дает следующее представление для оператора Перрона–Фробениуса:

$$Pf(x) = \sum_{m=1}^p \int_0^1 f\left((-1)^{-\sigma_m} (\Delta\xi_m u - (\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m)\right) \Delta\xi_m \delta(x - u) du =$$

$$= \sum_{m=1}^p f\left((-1)^{-\sigma_m} (\Delta\xi_m x - (\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m)\right) \Delta\xi_m. \quad (6)$$

Рассмотрим действие оператора (6) на индикаторную функцию единичного отрезка:

$$\Theta_{0,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases} \quad (7)$$

Результат очевиден:

$$P\Theta_{0,1}(x) = 1 \cdot \Theta_{0,1}(x). \quad (8)$$

Это означает, что равномерное распределение (на единичном интервале) является инвариантной плотностью оператора Перрона–Фробениуса, т. е. его собственной функцией с собственным числом $\lambda_0 = 1$. Все остальные собственные функции $\psi_m(x)$ оператора удовлетворяют условию [1]

$$\int_0^1 \Psi_m(x) dx = 0,$$

которое одновременно служит и эффективным критерием правильности полученного решения спектральной задачи.

Линейная собственная функция оператора Перрона–Фробениуса

По причинам, которые станут понятными из последующего изложения, здесь мы остановимся только на нахождении линейной собственной функции $\psi_1(x)$ оператора Перрона–Фробениуса (6) для рассматриваемого кусочно-

линейного отображения с произвольным наклоном ветвей. Эта собственная функция и соответствующее собственное число определяются условием

$$P\psi_1(x) = \lambda_1\psi_1(x). \quad (9)$$

Будем искать линейную собственную функцию оператора в виде $\psi_1(x) = x - \mu$. Тогда при подстановке этого выражения в (9) с учетом вида оператора (6) получим:

$$P(x - \mu) = \sum_{m=1}^p (-1)^{-\sigma_m} (\Delta\xi_m x - (\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m) \Delta\xi_m - \mu = \lambda_1(x - \mu). \quad (10)$$

Приравнивая коэффициенты при переменной x и свободные члены в левой и правой частях равенства (10), получим согласованную систему уравнений для определения собственного значения λ_1 и значения μ :

$$\sum_{m=1}^p (-1)^{-\sigma_m} \Delta^2 \xi_m = \lambda_1,$$

$$\sum_{m=1}^p (-1)^{-\sigma_m} (-(\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m) \Delta\xi_m - \mu = -\lambda_1 \mu.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{m=1}^p (-1)^{-\sigma_m} \Delta^2 \xi_m = \sum_{m=1}^p (-1)^{\sigma_m} \Delta^2 \xi_m, \\ \mu &= \frac{\sum_{m=1}^p (-1)^{-\sigma_m} (-(\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m) \Delta\xi_m}{1 - \lambda_1} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^p (-1)^{\sigma_m} (-(\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m) \Delta\xi_m}{1 - \sum_{m=1}^p (-1)^{\sigma_m} \Delta^2 \xi_m}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, линейная собственная функция оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейного отображения с полными ветвями и произвольным их наклоном (3) есть

$$\Psi_1(x) = x - \frac{\sum_{m=1}^p (-1)^{\sigma_m} (-(\sigma_m - 1)\xi_{m-1} - \sigma_m \xi_m) \Delta\xi_m}{1 - \sum_{m=1}^p (-1)^{\sigma_m} \Delta^2 \xi_m}. \quad (12)$$

Ей соответствует собственное число λ_1 .

Применим формулы (11) и (12) для расчета параметров конкретных простых отображений (рис. 2–4).

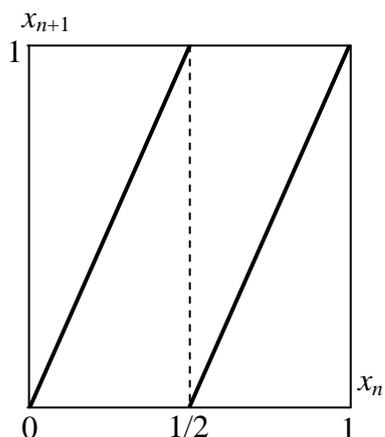


Рис. 2. Отображение «Сдвиг Бернулли»

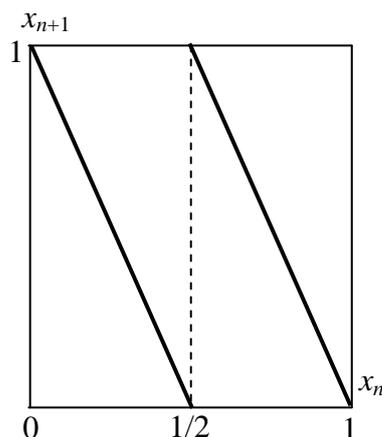


Рис. 3. Отображение «Инверсный сдвиг»

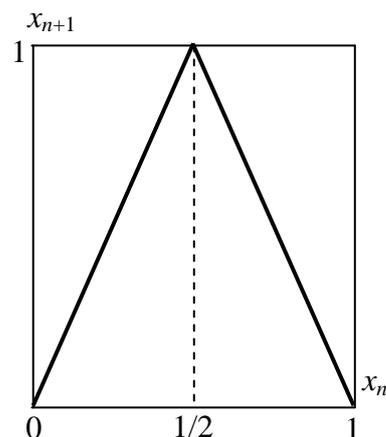


Рис. 4. Пирамидальное отображение

Значения λ_1 и μ занесены в табл. 1. Они совпадают с известными решениями [1], что свидетельствует в пользу корректности проведенных расчетов.

Таблица 1

Линейные собственные функции операторов Перрона–Фробениуса хаотических отображений на интервале (0, 1)

Отображение	σ_1	σ_2	ξ_1, ξ_2, ξ_3	λ_1	μ	$\psi_1(x)$
Сдвиг Бернулли $x_{n+1} = \{2x_n\}$ ($p = 2$, см. рис. 2)	0	0	0; 0,5; 1	0,5	0,5	$x - 0,5$
Инверсный сдвиг Бернулли $x_{n+1} = 1 - \{2x_n\}$ ($p = 2$, см. рис. 3)	1	1	0; 0,5; 1	-0,5	0,5	$x - 0,5$
Пирамидальное отображение $x_{n+1} = 1 - 2x_n - 1 $ ($p = 2$, см. рис. 4)	0	1	0; 0,5; 1	0	0,5	$x - 0,5$ (функция ноль-пространства)
Скошенное пирамидальное отображение ($p = 2$) $x_{n+1} = \begin{cases} x_n / \xi_1, & 0 \leq x_n \leq \xi_1, \\ x_n / (1 - \xi_1), & \xi_1 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$	0	1	0; ξ_1 ; 1	$2\xi_1 - 1$	0,5	$x - 0,5$

Интересно, что в структуре собственных функций оператора Перрона–Фробениуса некоторых отображений (в табл. 1 это пирамидальное отображение) может отсутствовать линейная функция, и тогда нулевому собственному числу отвечает функция, входящая в функциональное ноль-пространство этого оператора. Как мы увидим далее, это приводит к специфическим свойствам автокорреляционной

функции и соответствующему винеровскому спектру орбит хаотического отображения.

Автокорреляционная функция орбит хаотического отображения

Мерой статистической связи между сечениями связи чисто случайного (стохастического) или хаотического процессов выступает автокорреляционная функция процесса. При ансамблевом рассмотрении последовательностей $\{x_n\}$ автокорреляционная функция траекторий произвольного одномерного эргодического хаотического отображения, заданного на единичном интервале, определяется как [1]

$$R(n) = \int_0^1 \alpha g^n(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha - \left(\int_0^1 \alpha \rho(\alpha) d\alpha \right) \left(\int_0^1 g^n(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha \right), \quad (13)$$

где $g^n(\alpha)$ – результат n -кратного действия отображения $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$ (в переменных α); $\rho(\alpha)$ – инвариантная плотность отображения (рассматривается единичный интервал определения отображения). Аргументом автокорреляционной функции выступает целочисленная величина n – число итераций, разделяющее два сечения процесса. Выражение (13) имеет место для установившегося (стационарного) процесса, когда перемешивающие свойства отображения приводят к тому, что все величины $\alpha_n = g^n(\alpha)$ имеют одинаковое распределение, совпадающее с инвариантным. Тогда и их средние значения будут одинаковы:

$$\overline{\alpha_n} = \int_0^1 g^n(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \alpha \rho(\alpha) d\alpha, \quad n \geq 1. \quad (14)$$

Когда инвариантное распределение является равномерным, формулы (13) и (14) существенно упрощаются и принимают соответственно вид

$$R(n) = \int_0^1 \alpha g^n(\alpha) d\alpha - \frac{1}{4}, \quad (15)$$

$$\overline{\alpha_n} = \int_0^1 g^n(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}, \quad n \geq 0. \quad (16)$$

В случае *нестационарного* процесса среднее значение для $\alpha_n = g^n(\alpha)$ может быть получено в результате усреднения точного решения $\alpha_n = \alpha_n(n; \alpha_0)$ по начальному распределению величины α_0 . Если считать распределение α_0 инвариантным, то, естественно, будет справедлив результат (16).

Если ввести для операции усреднения черту сверху, можно более наглядно представить структуру (13):

$$R(n) = \overline{\alpha_n(\alpha_0, n)\alpha_0} - \overline{\alpha_n}\alpha_0 = \int_0^1 g^n(\alpha)\alpha\rho(\alpha) d\alpha - \left(\int_0^1 \alpha\rho(\alpha) d\alpha \right)^2. \quad (17)$$

Запишем для n -го шага итераций следующее представление:

$$\alpha_n = g^n(\alpha_0) = g^{n-1}(g(\alpha_0)), \quad (18)$$

т. е. рассмотрим α_n не только как однократное преобразование величины α_{n-1} , но и как $(n-1)$ -кратную композицию значения $\alpha_1 = g(\alpha_0)$.

Следовательно, в качестве основной вычислительной задачи остается расчет первого интеграла в формуле (13) или (17), определяющего ковариацию $K(n)$ (второй начальный момент) величин α и $g^n(\alpha)$. Используя представление (18) в виде композиции $g^n(\alpha) = g^{n-1}(\alpha) \circ g(\alpha)$, найдем для ковариации величин α и $g^n(\alpha)$

$$K(n) = \overline{\alpha_n\alpha_0} = \int_0^1 g^{n-1}(\alpha)P\alpha d\alpha. \quad (19)$$

Очевидно, что процесс преобразований в формуле (19) может быть продолжен на основе представлений

$$\alpha_{n-1} = g^{n-1}(\alpha) = g^{n-2} \circ g(\alpha), \dots, \alpha_2 = g \circ g(\alpha), \alpha_1 = g(\alpha).$$

В итоге описанных преобразований автокорреляционная функция орбит хаотического отображения с равномерным инвариантным распределением представляется в виде

$$R(n) = \int_0^1 \alpha P^n \alpha d\alpha - \frac{1}{4}. \quad (20)$$

Заметим, что для любого отображения с равномерной инвариантной плотностью на единичном интервале дисперсия процесса одинакова:

$$R(0) = \int_0^1 \alpha^2 d\alpha - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \quad (21)$$

Чтобы эффективно пользоваться при расчете автокорреляционных функций хаотических отображений внешне простой и элегантной формулой (20), необходимо знать результат многократного действия оператора Перрона–Фробениуса соответствующего отображения на независимую переменную α . Чтобы аналитически найти решение этой задачи, независимую переменную необходимо представить в виде:

а) либо суммы (!) константы и *линейной собственной функции* (линейных собственных функций) оператора Перрона–Фробениуса;

б) либо суммы константы и функции из ноль-пространства оператора Перрона–Фробениуса.

Результат действия оператора на константу окажется константой, собственная функция будет воспроизводиться с множителем в виде собственного числа, а действие на функцию из ноль-пространства даст ноль.

В результате интеграл в выражении (17) для автокорреляционной функции существенно упростится и его можно будет проинтегрировать – аналитически или численно. Решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса приобретает, таким образом, важное значение для радиофизической задачи о расцеплении корреляций в динамической системе.

Автокорреляционная функция кусочно-линейного отображения с произвольным наклоном ветвей

Применим формулу (19) для расчета автокорреляционной функции кусочно-линейного отображения с произвольным наклоном полных линейных ветвей (3). Рассматривая линейную собственную функцию соответствующего оператора Перрона–Фробениуса (6) пока в общем виде

$$\psi_1(x) = (x - \mu),$$

согласно (19) получим для автокорреляционной функции отображения (3) следующее аналитическое представление:

$$\begin{aligned} R(n) &= \int_0^1 \alpha P^n (\Psi_1(\alpha) + \mu) d\alpha - \frac{1}{4} = \int_0^1 (\alpha(\lambda_1^n \Psi_1(\alpha) + \mu)) d\alpha - \frac{1}{4} = \\ &= \int_0^1 (\alpha(\lambda_1^n (\alpha - \mu) + \mu)) d\alpha - \frac{1}{4} = \lambda_1^n \left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{2} \right) + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (22)$$

Применим формулу (22) для определения автокорреляционной функции орбит некоторых важных частных случаев кусочно-линейных отображений, перечисленных в табл. 1. Соответствующие выражения для искомой характеристики содержит табл. 2.

Результаты, приведенные в табл. 2 для сдвигов Бернулли и пирамидального отображения, совпадают с опубликованными ранее [1], что можно трактовать как подтверждение правильности предложенного обобщенного алгоритма для отображений с произвольным наклоном кусочно-линейных ветвей. Классическому сдвигу Бернулли отвечает спадающая по экспоненциальному закону автокорреляционная функция. Инверсный сдвиг Бернулли характеризует осциллирующая (и при этом меняющая знак) автокорреляционная функция. Пирамидальное отображение демонстрирует «дискретный белый шум».

Автокорреляционные функции хаотических отображений на интервале (0, 1)

Отображение	Автокорреляционная функция	Характер автокорреляционной функции
Сдвиг Бернулли	$R(n) = \frac{1}{12} 2^{-n} = \frac{1}{12} e^{-n\Lambda}, n = 0, 1, 2, \dots$	Монотонно убывающая. Показатель Ляпунова $\Lambda = -\ln \lambda_1 = \ln 2$
Инверсный сдвиг Бернулли	$R(n) = \frac{1}{12} (-2^{-n}), n = 0, 1, 2, \dots$	Убывающая, осциллирующая
Пирамидальное отображение	$R(n) = \frac{1}{12} \delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$	Дельта-коррелированная, «дискретный белый шум»
Скошенное пирамидальное отображение	$R(n) = \frac{1}{12} (2\xi_1 - 1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$	Зависит от значения параметра $\xi_1 \in (0, 1)$: – монотонно убывающая при $2\xi_1 > 1$; – осциллирующая, убывающая при $2\xi_1 < 1$; – «дискретный белый шум» при $\xi_1 = 1/2$

Результат для скошенного пирамидального отображения говорит о зависимости характера автокорреляционной функции от значения точки излома отображения: при $\xi_1 > 1/2$ наблюдаются свойства автокорреляционной функции сдвигов Бернулли, а при $\xi_1 < 1/2$ поведение автокорреляционной функции подобно поведению этой характеристики для инверсных сдвигов Бернулли. При $\xi_1 = 1/2$ скошенное отображение приобретает вид классического пирамидального отображения, в соответствии с чем $R(n) = 0$ для всех $n > 1$.

В работе рассмотрено кусочно-линейное отображение с произвольным наклоном линейных ветвей, определенное на единичном интервале и имеющее полные ветви (переводящие отрезок своего определения на полный интервал задания отображения). Особенность отображения состоит в том, что оно носит обобщенный характер. Из него при соответствующем подборе параметров (угла наклона ветви, точек разбиения единичного отрезка) могут быть получены кусочно-линейные отображения с любым количеством ветвей.

Главными решаемыми задачами были формулировка оператора Перрона–Фробениуса, нахождение его собственной линейной функции или линейной функции его ядра (ноль-пространства) и аналитический расчет автокорреляционной функции орбит.

Линейная собственная функция находилась непосредственно из определяющего ее уравнения. Знания только одной линейной собственной функции и соответствующего собственного числа было достаточно для аналитического расчета автокорреляционной функции орбит, поскольку для

расчета в основном требовался результат многократного действия оператора Перрона–Фробениуса на независимую переменную. И чтобы этот результат получить, независимая переменная формально выражалась через сумму собственной функции и константы, которую требовалось определить. Многократное действие оператора на такую линейную комбинацию сопровождалось увеличением степени собственного числа, присутствующего в качестве множителя перед собственной функцией. Затем происходила обратная замена: собственная функция представлялась как линейная функция независимой переменной, и проводился успешный расчет интеграла, определяющего автокорреляционную функцию.

Легко проверялась правильность расчетов путем сравнения полученных результатов с результатами для кусочно-линейных отображений, ветви которых имеют одинаковый по модулю угловой коэффициент.

Знание линейных собственных функций позволяет достичь аналитического результата и выявить особенности различных отображений в плане автокорреляционных свойств их орбит – экспоненциальный спад или осцилляции. Скорость «расщепления корреляций» определяется значением собственного числа, отвечающего линейной функции. Наличие линейной функции ядра оператора приводит к особому виду автокорреляционной функции, отвечающей «дискретному белому шуму»: уже первая итерация показывает отсутствие корреляционной связи между различными сечениями процесса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аникин В. М., Голубенцев А. Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
2. *Golubentsev A. F., Anikin V. M.* The explicit solutions of Frobenius–Perron equation for the chaotic infinite maps // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1998. Vol. 8, № 4–5. P. 1049–1051.
3. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С. С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса–Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67–73.
4. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М.* Специальные функции в теории детерминированного хаоса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 3. С. 50–58.
5. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M., Arkadaksky S. S.* On the convergence of nonstationary solutions of the Perron-Frobenius equation to the invariant density // International Conference on Control of Oscillations and Chaos, Proceedings 2nd International Conference on Control of Oscillations and Chaos (COC 2000). St. Petersburg, Russia, 2000. St. Petersburg : IEEE, 2000. P. 142–143.
6. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3–17.
7. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16–34.

8. *Аникин В. М., Ремизов А. С., Аркадакский С. С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
9. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Особенности решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, обусловленные критическим сочетанием параметров хаотического отображения // Теоретическая физика. 2007. Т. 8. С. 176–183.
10. *Аникин В. М.* Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
11. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С., Купцов С. Н., Василенко Л. П.* Определение инвариантной плотности отображения Реньи на основе Гауссова подхода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 46–56.
12. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Купцов С. Н., Ремизов А. С., Василенко Л. П.* О показателе Ляпунова для хаотических одномерных отображений с равномерным инвариантным распределением // Изв. РАН. Сер. физическая. 2008. Т. 72, № 12. С. 1780–1784.
13. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С., Купцов С. Н., Василенко Л. П.* Релаксационные свойства хаотических динамических систем // Изв. РАН. Сер. физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1743–1749.
14. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Купцов С. Н., Ремизов А. С.* Классификация хаотических моделей малоразмерной нелинейной динамики // Изв. РАН. Сер. физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1797–1800.
15. *Аникин В. М., Чебаненко С. В.* Аналитический расчет корреляционных функций дискретных хаотических сигналов // Гетеромагнитная микроэлектроника : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 8 : Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Системы информационной безопасности. Прикладные аспекты. С. 103–109.