

**О ПРОБЛЕМЕ СХОДИМОСТИ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ  
В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ МЕТОДЕ**

**С. В. Чурочкина**

Саратовский государственный университет  
Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83  
E-mail: klechshevskaya@mail.ru

Рассматриваются вопросы, связанные с проблемой сходимости ряда теории возмущений в квазипотенциальном подходе. Обсуждаются и систематизируются полученные к настоящему времени поправки, зависящие от параметра отношения масс частиц.

*Ключевые слова:* теория связанных состояний, квазипотенциальный подход.

**About the Problem of Convergence of the Series  
of the Perturbation Theory in the Quasipotential Method**

**S. V. Churochkina**

The questions connected to the problem of convergence of the series of the perturbation theory in quasipotential approach are considered. The mass ratio corrections obtained recently are discussed and systematized.

*Key words:* theory of bound states, quasipotential approach.

Замкнутая система двух релятивистских частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  характеризуется сохраняющейся полной энергией  $E$ . В задаче на рассеяние

$$E = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2 + m_2^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i$  – импульсы начального и конечного состояний частицы с массой  $m_i$  соответственно,  $i = 1, 2$ .

В случае связанного состояния

$$E = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2}, \quad (2)$$

где  $M$  – масса покоя связанного состояния;  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  – полный импульс системы двух частиц.

При рассмотрении задачи на рассеяние согласно (1) получают  $E \geq m_1 + m_2$ . В случае же связанного состояния системы двух частиц согласно (2) полная энергия определяется как  $E < m_1 + m_2$ .

В системе центра масс

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \\ \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Релятивистская система двух частиц описывается с помощью полной двухчастичной функции Грина  $G$ , которая в системе центра масс параметризуется, как показано на рис. 1. Здесь  $p_i$  и  $q_i$  – 4-импульсы начального и конечного состояний  $i$ -й частицы,  $i = 1, 2$ ;  $p_0$  и  $q_0$  – относительные энергии начального и конечного состояний,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{E^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E^2}, \\ \eta_2 &= \frac{E^2 + m_2^2 - m_1^2}{2E^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

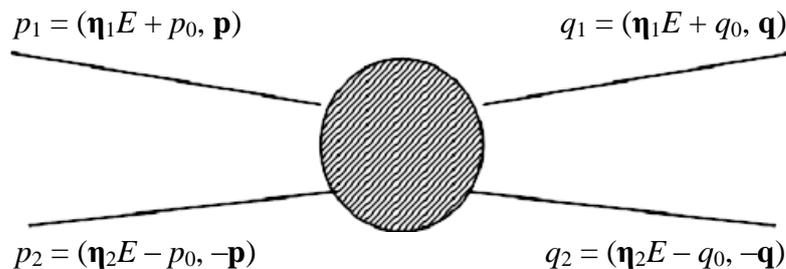


Рис. 1. Параметризация двухчастичной функции Грина вне массовой поверхности в системе центра масс

Положим

$$E = \eta_1 E + \eta_2 E = E_1 + E_2.$$

Для системы двух частиц, связанной кулоновским взаимодействием,

$$E_C = m_1 + m_2 - \frac{\mu\alpha^2}{2n^2}, \quad (5)$$

где  $\mu$  – приведенная масса;  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры;  $n$  – главное квантовое число. Учитывая (5), выражения (4) с точностью до  $\alpha^4$  можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \eta_1 E &= m_1 - \frac{\mu^2 \alpha^2}{2m_1 n^2}, \\ \eta_2 E &= m_2 - \frac{\mu^2 \alpha^2}{2m_2 n^2}. \end{aligned}$$

Известно, что при  $\alpha\mu \rightarrow 0$

$$\frac{\alpha\mu}{(p^2 + \alpha^2\mu^2)^2} = \pi^2 \delta(\mathbf{p}),$$

где  $\delta(\mathbf{p})$  – дельта-функция Дирака.

Поэтому согласно (5)

$$E \rightarrow E_C \cong m_1 + m_2. \quad (6)$$

Волновую функцию  $\Psi_{100}(\mathbf{p})$  в приближении  $\alpha\mu \rightarrow 0$  можно преобразовать следующим образом:

$$\Psi_{100}(\mathbf{p}) = \frac{8\pi\alpha\mu}{(\mathbf{p}^2 + \alpha^2\mu^2)^2} \varphi_1(0)(2\pi)^{-3/2} \Rightarrow \frac{8\pi}{\sqrt{(2\pi)^3}} \pi^2 \delta(\mathbf{p}) \varphi_1(0) = \sqrt{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}) \varphi_1(0), \quad (7)$$

где  $\varphi_1(0) = \frac{\alpha^3 \mu^3}{\pi}$ .

$E = m_1 + m_2$  – единственный случай, когда выражения для полной энергии (1) и (2) совпадают. Тогда связанное состояние может быть описано в терминах амплитуды рассеяния  $T$  на массовой поверхности.

Для описания системы двух частиц (фермионов) используют двухвременную функцию Грина  $G$  в импульсном представлении

$$\overline{G}^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = \overline{G}_0^+ + \overline{G}_0 T \overline{G}_0^+, \quad (8)$$

$$T = K + K G K, \quad (9)$$

$$\overline{G}_0^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = F = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) (E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^{-1}, \quad (10)$$

где  $G_0$  – функция Грина невзаимодействующих частиц;  $\varepsilon_{ip} = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ , символ «—» означает переход от четырехвременного формализма функций Грина к двухвременному, т. е. интегрирование по относительным энергиям  $p_0$  и  $q_0$ :

$$\overline{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = (2\pi)^{-2} \int dp_0 dq_0 G(p_1, p_2; q_1, q_2);$$

символ «+» означает проектирование на состояние с положительными значениями энергии фермионов

$$\overline{G}^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = u_1^*(\mathbf{p}) u_2^*(-\mathbf{p}) \overline{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) \gamma_{10} \gamma_{20} u_1(\mathbf{q}) u_2(-\mathbf{q});$$

$\gamma_{10}$  и  $\gamma_{20}$  – матрицы Дирака;  $u_i$  – дираковский биспинор, являющийся положительно-частотным решением уравнения Дирака; символ «\*» означает транспонирование дираковского биспинора  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $K$  – ядро уравнения Бете–Солпитера, представляющее собой сумму двухчастично неприводимых диаграмм;  $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, p_0, q_0; E)$  – релятивистская амплитуда рассеяния двух частиц вне массовой поверхности, определяемая из уравнения Бете–Солпитера.

Квазипотенциальное уравнение для волновой функции  $\Psi_E(\mathbf{q})$  системы двух различных фермионов записывается в виде

$$\begin{aligned} (\overline{G}^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E))^{-1} \Psi_E(\mathbf{q}) &= 0 \\ \text{или } F^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) \Psi_E(\mathbf{q}) &= V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) \Psi_E(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  – квазипотенциал, который определяется следующим образом:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = F^{-1} - (\overline{G}^+)^{-1} = F^{-1} - F^{-1} \overline{G}_0 T \overline{G}_0^+ (\overline{G}^+)^{-1}. \quad (12)$$

Подставляя в (11) явный вид  $F$  (10), получают следующее уравнение:

$$(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p}) \Psi_E(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) \Psi_E(\mathbf{q}) d^3 q. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение оператор  $\tau$ , равный

$$\tau = F^{-1} \overline{G}_0 T \overline{G}_0^+ F^{-1}. \quad (14)$$

Выражение квазипотенциала (12) для системы двух фермионов может быть также записано с помощью оператора  $\tau$  следующим образом:

$$V = \frac{\tau}{1 + F\tau}. \quad (15)$$

В квантовой электродинамике кулоновское взаимодействие для связанных состояний является основным. Согласно (6)  $E \approx m_1 + m_2$ , поэтому важно изучить поведение оператора  $\tau$  вблизи массовой поверхности.

Запишем часть выражения (14) для оператора  $\tau$  в явном виде

$$\begin{aligned} \overline{G_0 T G_0}^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & -u_1^*(\mathbf{p})u_2^*(-\mathbf{p}) \int dp_0 dq_0 \int dk_0 dk'_0 \delta(p_0 - k_0) \delta(k'_0 - q_0) S_1(p_1) S_2(p_2) \times \\ & \times T(k_0, k'_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}; E) S_1(q_1) S_2(q_2) \gamma_{10} \gamma_{20} u_1(\mathbf{q}) u_2(-\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $S_i$  – одночастичная функция Грина  $i$ -го фермиона.

Представляя  $\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int dt \exp(ixt)$  и используя в соответствии с теорией вычетов формулы типа

$$\int \frac{dk_0}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\varepsilon} \exp(-ik_0 t) = -\frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} \exp(-i|\mathbf{k}||t|), \quad (17)$$

находим, что выражение (16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \overline{G_0 T G_0}^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & u_1^*(\mathbf{p})u_2^*(-\mathbf{p}) \int dt \int d\tau' \int dk_0 \int dk'_0 \exp(ik'_0 \tau') \exp(ik_0 t) \times \\ & \times T(k_0, k'_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}; E) (\exp[-i(\varepsilon_{2p} - E_2 - i\varepsilon)|t|] + \\ & \exp[-i(\varepsilon_{1p} - E_1 - i\varepsilon)|t|]) (\exp[-i(\varepsilon_{2q} - E_2 - i\varepsilon)|\tau'|] + \\ & + \exp[-i(\varepsilon_{1q} - E_1 - i\varepsilon)|\tau'|]) \gamma_{10} \gamma_{20} u_1(\mathbf{q}) u_2(-\mathbf{q}) F(\mathbf{p}) F(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (18)$$

Проведём интегрирование (18) по  $t$  и  $\tau'$ , применяя разложение вида

$$\exp[-i(\varepsilon_{2p} - E_2 - i\varepsilon)|t|] = \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k (\varepsilon_{2p} - E_2)^k |t|^k}{k!} \right) \exp[-\varepsilon|t|]. \quad (19)$$

На массовой поверхности  $E_i = \varepsilon_{ip}$ , и поэтому имеем

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) + (\varepsilon_{ip} - E_i)^n \Delta T'_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) (\varepsilon_{iq} - E_i)^n \approx T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E), \quad (n=1, 2, \dots), \quad (20)$$

$$T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = T_+(p_0 = 0, q_0 = 0, \mathbf{p}, \mathbf{q}; E), \quad (21)$$

где  $\Delta T'_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  – поправка к амплитуде рассеяния  $T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  вблизи массовой поверхности.

Следовательно, на массовой поверхности оператор  $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  и физическая амплитуда рассеяния  $T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  совпадают. В связи с этим выражение (15) можно записать следующим образом:

$$V = \frac{T_+}{1 + FT_+}, \quad (22)$$

и в этом случае работает обычная диаграммная техника Фейнмана.

С учетом вышесказанного квазипотенциальное уравнение принимает вид

$$(E_C - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})\Psi_E(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)\Psi_E(\mathbf{q})d^3q, \quad (23)$$

и уровни энергии находятся с помощью теории возмущений.

Решение задачи на сверхтонкое расщепление основного уровня энергии атома позитрония можно выполнить, используя  $\delta$ -приближение волновой функции [1, 2]. При этом квазипотенциал задается фейнмановскими диаграммами (рис. 2).

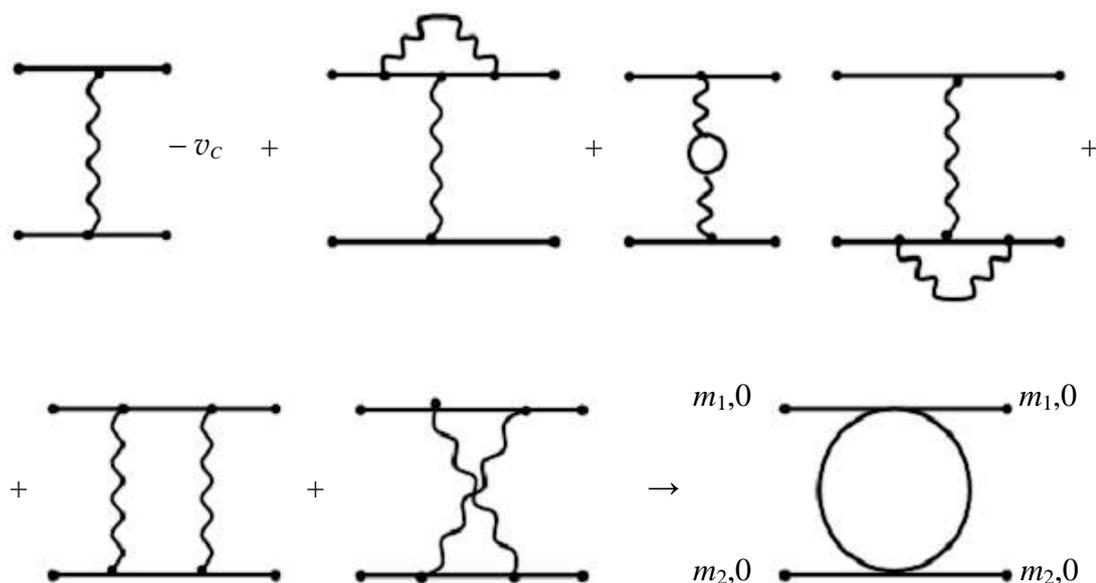


Рис. 2. Сумма фейнмановских диаграмм, необходимых для вычисления сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония. Здесь  $v_c$  – кулоновский потенциал

Значение сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония, полученное с использованием  $\delta$ -приближения волновой функции, имеет вид

$$\Delta E_{ee}(\alpha^5) = \frac{\alpha^4 m}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \left[ \frac{7}{6} - \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) \right], \quad (24)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_i$  – матрица Паули,  $i = 1, 2$ .

Особенностью этих вычислений является введение обрезания виртуального импульса в инфракрасной области по параметру обрезания  $\varepsilon$ , который компенсируется в сумме диаграмм, в связи с чем его точная величина не имеет значения.

Таким образом, при расчетах величины сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водородоподобного атома с использованием  $\delta$ -приближения кулоновской волновой функции (7) получаются лишь целочисленные по  $\alpha$  вклады, точно так же, как это имеет место при решении задач на рассеяние.

Для увеличения точности расчетов необходимо выйти за массовую поверхность и использовать выражение для квазипотенциала (22). В этом случае связь между энергией и импульсом разрывается, и аргументы амплитуды  $T_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$  оказываются независимыми. В работе [3] проанализирована аннигиляционная диаграмма с поляризационной вставкой (рис. 3) и обнаружен логарифмический по постоянной тонкой структуры вклад, равный

$$\Delta E(\alpha^6 \ln \alpha^{-1}) = \frac{1}{24} \alpha^6 m \ln \alpha^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (25)$$

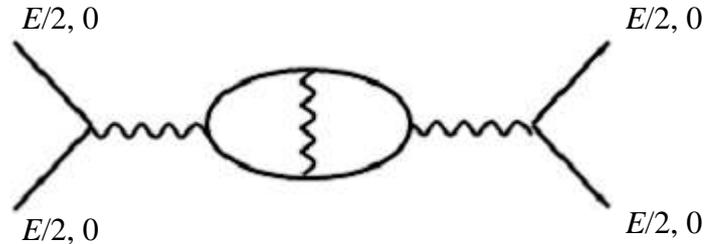


Рис. 3. Фейнмановская аннигиляционная диаграмма с поляризационной вставкой

Затем в работе [4] подобная параметризация диаграмм позволила вычислить логарифмические по  $\alpha$  вклады от других трехфотонных диаграмм. Чтобы получить подобные вклады от диаграмм низшего по  $\alpha$  порядка, необходимо использовать выражение квазипотенциала (15) через оператор  $\tau$ .

Таким образом, в случае выхода за массовую поверхность величина энергии связи  $W = E - m_1 - m_2$  позволяет избежать вопроса об особенностях квазипотенциала в инфракрасных областях.

Кроме того, при значениях импульсов  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \neq 0$  должно использоваться точное выражение кулоновской волновой функции. В результате ряд по постоянной тонкой структуре  $\alpha$  усложняется из-за необходимости учитывать

в пропагаторах диаграмм рис. 2 значения  $E \neq m_1 + m_2$ ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \neq 0$ . Степени  $\alpha$  в этом случае возникают не только за счет зарядов в вершинах диаграмм, но и за счет новых модифицированных значений пропагатора.

Особенность такого подхода к расчету диаграмм особенно проявляется в существовании логарифмических по  $\alpha$  вкладов, что может быть интерпретировано как следствие эффекта связанности частиц.

Если массы частиц равны, то уровни энергии характеризуются одним малым параметром – постоянной тонкой структуры  $\alpha$ . Выражение для уровней энергии позитрония для независимых от спина  $S$  взаимодействий можно представить в виде ряда [5]

$$\frac{E(n^{2S+1}L_{2J+1})}{h} = f_{\text{RYD}}(a + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^3 \ln \alpha^{-1} + e\alpha^4 \ln \alpha^{-1} + f\alpha^4 + \dots), \quad (26)$$

где спектроскопическое обозначение  $n^{2S+1}L_{2J+1}$  описывает состояние;  $S$  – спиновое квантовое число;  $J$  – квантовое число полного момента;  $h$  – постоянная Планка. Энергетические состояния атома с различными значениями  $L$  (от 0 до  $n$ ) обозначаются большими буквами  $S, P, D, F, J, H$  и т. д. Явный вид коэффициентов  $a, b, c, d, e, f$  указан в работе [6]. Частота  $f_{\text{RYD}}$  равна  $cR_\infty$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $R_\infty$  – постоянная Ридберга.

При этом надо отметить, что коэффициент  $e$  отличен от нуля только для взаимодействий в аннигиляционном канале.

Прецизионный расчет обнаружил отсутствие логарифмических по  $\alpha$  поправок в прямом канале позитрония, а следовательно, и в мюонии.

Для водородоподобных систем, состоящих из частиц с различными массами, структура ряда (26) усложняется за счет необходимости учета массового коэффициента  $m_1/m_2$ .

Как известно, структура уровней энергии водородоподобных атомов характеризуется тремя малыми параметрами: постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , связанной с зарядом электрона, величиной заряда  $Z$  тяжелой частицы, характеризуемой параметром  $Z\alpha$ , и массовым коэффициентом  $m_1/m_2$ . Наибольший интерес вызывают поправки на отдачу, зависящие от параметров  $Z\alpha$  и  $m_1/m_2$ .

В обзоре [7] было отмечено, что первые поправки на отдачу  $\Delta E$ , пропорциональные  $(Z\alpha)^5 m_1^2/m_2$ , генерируются ядром двухфотонных взаимодействий. Аргументация этого утверждения восходит к работам [8, 9] по применению двухчастичного релятивистского формализма к описанию связанных состояний. Полученный в этих работах результат от обмена двумя поперечными фотонами был впоследствии подтвержден в статьях [10, 11]:

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{2}{3} \delta_{10} \ln \alpha^{-1} - \frac{8}{3} \ln[k_0(n)] - \frac{1}{9} \delta_{10} - \frac{7}{3} a_n + \right. \\ \left. + \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \delta_{10} \left( m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} - m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} \right) \right\}, \quad (27)$$

где  $l$  – орбитальное квантовое число;  $\ln[k_0(n)]$  – логарифм Бете;  $\delta_{l0}$  – символ Кронекера;  $a_n = -2 \left[ \ln \frac{2}{n} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \right] \delta_{l0} + \frac{1 - \delta_{l0}}{l(l+1)(2l+1)}$ .

Отметим наличие в выражении (27) весьма высокого по порядку величины логарифмического по отношению масс частиц вклада, пропорционального  $m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} - m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu}$ :

$$\begin{aligned} \Delta E^\beta &= \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi m_1 m_2} \frac{1}{n^3} \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \left[ m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} - m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} \right] = \\ &= \frac{2(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi m_1 m_2} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \beta^2} \left[ \beta^2 \ln \frac{1 + \beta}{\beta} - \ln(1 + \beta) \right] \sim \frac{2(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi m_1 m_2} \frac{1}{n^3} \beta^2 \ln \beta^{-1}, \quad (28) \end{aligned}$$

где  $\beta = m_1/m_2$ .

Иного логарифмического по массовому коэффициенту  $\beta$  вклада в тонкий сдвиг уровней энергии от других обменов во всех перечисленных работах обнаружено не было.

Все перечисленные в (28) поправки, в том числе логарифмический по массовому коэффициенту  $\beta$  член, получены с помощью разложений типа

$$\sqrt{p^2 + m_i^2} \approx m_i + \frac{p^2}{2m_i} + \dots, \quad (29)$$

Однако существуют и релятивистские эффекты отдачи, которые не могут быть описаны при разложениях типа (29).

Рассмотрим стандартный интеграл, при сравнении с которым устанавливаются наличие и величина поправки  $\ln(m_1/m_2)^{-1}$ :

$$i_\beta = \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m_1^2} \sqrt{p^2 + m_2^2}} = \frac{\beta}{\mu(1 + \beta)} \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1}} = \frac{\beta}{\mu(1 + \beta)} K(\sqrt{1 - \beta^2}), \quad (30)$$

где  $K(\sqrt{1 - \beta^2})$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Интеграл  $i_\beta$  не может быть выражен в элементарных функциях. Однако его легко представить в виде суммы

$$i_\beta = i_\beta^0 + i'_\beta,$$

$$i_\beta^0 = \frac{\beta}{\mu(1 + \beta)} \int_0^\infty \frac{dq q}{(q^2 + \beta^2) \sqrt{q^2 + 1}} = \frac{\beta}{\mu(1 + \beta) \sqrt{1 - \beta^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \approx \frac{\beta}{\mu(1 + \beta)} \ln \beta^{-1}, \quad (31)$$

$$i'_\beta = \frac{\beta^3}{\mu(1+\beta)} \int_0^\infty \frac{dq}{(q^2 + \beta^2)(\sqrt{q^2 + \beta^2} + q)\sqrt{q^2 + 1}} \approx \frac{\beta}{\mu(1+\beta)}. \quad (32)$$

Таким образом, величина  $i'_\beta$  представляет собой лидирующий вклад интеграла  $i_\beta$ .

Основной вклад интеграла (30) можно получить и иначе:

$$i_\beta = \frac{\beta}{\mu} \left\{ \int_0^\beta \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1}} + \int_\beta^1 \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1}} + \int_1^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1}} \right\}. \quad (33)$$

Раскладывая подынтегральные выражения в ряд, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + \beta^2} &= \beta \left( 1 + \frac{p^2}{\beta^2} \right) \approx \beta + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\beta} + \dots & (0 \leq p \leq \beta), \\ \sqrt{p^2 + \beta^2} &= p \left( 1 + \frac{\beta^2}{p^2} \right) \approx p + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{p} + \dots & (\beta \leq p \leq \infty). \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следует, что первое и последнее слагаемые логарифмических вкладов по  $\beta$  не дают. Остается вычислить интеграл

$$\frac{\beta}{\mu} \int_\beta^1 \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1}} \approx \frac{\beta}{\mu} \int_\beta^1 \frac{dp}{p} \left( 1 + \frac{\beta^2}{p^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{p^2}{2} \right) \approx \frac{\beta}{\mu} \ln \beta^{-1}. \quad (35)$$

Ранее в работе [12] с применением указанной техники был исследован простейший обмен одним кулоновским фотоном. Установлено, что существует дополнительный логарифмический по массовому коэффициенту вклад в низший по постоянной тонкой структуры порядок тонкого сдвига  $S$ -уровней энергии водородоподобного атома:

$$\Delta \tilde{E}_C^{\ln} = -\frac{11}{8\sqrt{2}\pi} \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^3}{1+\beta} \ln \beta^{-1}. \quad (36)$$

Всегда остается вопрос о том, не зависит ли результат исследования от особенностей выбранного метода описания связанных состояний.

О новых логарифмических по  $m_1/m_2$  вкладах следует говорить особо: на протяжении многих лет найденная поправка [9], пропорциональная  $\ln \beta^{-1}$ , оставалась единственной. Некоторое время назад завершилась продолжительная дискуссия о вкладе  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}$  в тонкий сдвиг  $S$ -уровней энергии водородоподобных атомов. Благодаря расчетам [5] было установлено, что для атомов с  $m_1 \neq m_2$  такой вклад отсутствует.

Можно показать, что существование подобной логарифмической поправки как в расчетах [5], так и в исследованиях [13], обуславливает один и тот же стандартный интеграл. Выпишем соответствующее выражение, обращаясь к работе [14]:

$$\int d^3 p d^3 p' \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}'^2}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 (p'^2 + \alpha^2 \mu^2)^2}. \quad (37)$$

Очень важно замечание автора [14] относительно расходимости этого интеграла. Факторы, не играющие роли для вычисления величин, не содержащих  $\ln \alpha^{-1}$ , опущены.

Несколько ранее и более точно интеграл такого же вида (37) исследовался в работе [13]. Для атомов с  $m_1 \neq m_2$  имеем

$$I_{\text{st}} = \int \frac{d^3 p}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d^3 p'}{(p'^2 + \alpha^2 \mu^2) (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}. \quad (38)$$

Интеграл по трехимпульсу  $\mathbf{p}'$  можно считать табличным, поэтому находим

$$I_{\text{st}} = (2\pi)^3 \int_0^\infty \frac{dp p}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \arctg \frac{p}{\alpha \mu}.$$

Несложные алгебраические преобразования дают

$$I_{\text{st}} = \frac{(2\pi)^3}{m_2} \left\{ \int_0^\infty \frac{dp p}{\varepsilon_{1p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \arctg \frac{p}{\alpha \mu} - \int_0^\infty \frac{dp p}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (\varepsilon_{2p} + m_2)} \arctg \frac{p}{\alpha \mu} \right\}. \quad (39)$$

Первый интеграл членов, пропорциональных  $\ln \beta^{-1}$ , не содержит, его основной вклад равен

$$I_s^1 \cong \frac{4\pi^4}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}.$$

Из работ [13, 14] следует, что подобные вклады компенсируются в сумме диаграмм. Во втором интеграле из (39) перейдем к безразмерной переменной с помощью замены  $p = p' m_2$ :

$$I_s^2 = -\frac{(2\pi)^3}{m_2^2} \int_0^\infty \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1} (\sqrt{p^2 + 1} + 1)} \arctg \frac{p}{\gamma}, \quad (40)$$

где  $\gamma = \alpha \mu / m_2$ .

Рассмотрим следующие интервалы изменения переменной интегрирования  $p$ :  $0 \leq p \leq \gamma$ ;  $\gamma \leq p \leq \beta$ ;  $\beta \leq p \leq 1$  и  $1 \leq p < \infty$ . При  $1 \leq p < \infty$  интеграл  $I_s^2$  может содержать лишь целочисленные степени малых  $m_1/m_2$  и  $\alpha$ .

Далее последовательно оценим лидирующие вклады интегралов

$$\int_0^{\gamma} \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1} (\sqrt{p^2 + 1} + 1)} \operatorname{arctg} \frac{p}{\gamma} \approx \frac{1}{2\beta} \int_0^{\gamma} dp p \operatorname{arctg} \frac{p}{\gamma} \approx \frac{\gamma^2}{6\beta}, \quad (41)$$

$$\int_{\gamma}^{\beta} \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1} (\sqrt{p^2 + 1} + 1)} \operatorname{arctg} \frac{p}{\gamma} \approx \frac{1}{2\beta} \int_0^{\gamma} dp p \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{p} \right) \approx \frac{\pi}{4\beta} (\beta^2 - \gamma^2) - \frac{\gamma}{2\beta} (\beta - \gamma). \quad (42)$$

Как видно из (41) и (42), интервалы  $0 \leq p \leq \gamma$  и  $\gamma \leq p \leq \beta$  вкладов, пропорциональных  $\ln \beta^{-1}$ , не содержат. Наконец, по аналогии с вычислением интеграла (35) получим

$$\int_{\beta}^1 \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + \beta^2} \sqrt{p^2 + 1} (\sqrt{p^2 + 1} + 1)} \operatorname{arctg} \frac{p}{\gamma} \approx \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} dp \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{p} \right) \approx \frac{\pi}{4\beta} (1 - \beta) - \frac{\gamma}{2} \ln \beta^{-1}. \quad (43)$$

Таким образом, исследовавшийся различными методами стандартный интеграл  $I_{st}$  (38) содержит логарифмический по массовому коэффициенту  $m_1/m_2$  вклад.

Учитывая поправку (36), можно сделать вывод о том, что поправки, пропорциональные  $\ln \beta^{-1}$ , следует вычислять в любых порядках теории возмущений по постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

Вычисление поправок, имеющих нетривиальную зависимость от массового параметра  $m_1/m_2$ , является актуальной задачей, так как в последнее время благодаря применению методов бездоплеровской двухфотонной спектроскопии было получено внушительное увеличение точности экспериментальных данных [15].

Согласно вышеизложенному вклад в величину тонкого сдвига  $S$ -уровней энергии водородоподобного атома, учитывающий эффекты отдачи, подобные указанным в (27), с учетом новых данных [9, 12, 16–21] можно записать в виде

$$\Delta \tilde{E} = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi m_1 m_2 n^3} \left\{ \frac{2}{3} \delta_{l0} \ln(Z\alpha)^{-1} - \frac{8}{3} \ln[k_0(n)] - \frac{1}{9} \delta_{l0} - \frac{7}{3} a_n + \beta \ln \beta^{-1} [\beta C_{\beta} + \beta^2 C_{\beta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\beta} C_{\alpha/\beta} + \alpha C_{\alpha} + \alpha C_{\alpha\beta} \ln \beta^{-1}] + \alpha \sqrt{\beta} C_{\sqrt{\beta}} + \alpha \beta \sqrt{\beta} C_{\beta\sqrt{\beta}} \right\}, \quad (44)$$

где

$$C_{\beta} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 1,646,$$

$$C_{\beta^2} = -\frac{11}{8\sqrt{2}} \approx -0,972,$$

$$C_{\alpha/\beta} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} [\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}] \approx 0,480,$$

$$C_{\alpha} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{17}{9} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}(1 + 2\sqrt{2}) \ln(1 + \sqrt{2}) + 6 \ln 2 \right] \approx 0,539,$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \approx 0,116,$$

$$C_{\sqrt{\beta}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785,$$

$$C_{\beta\sqrt{\beta}} = -\frac{3}{16} \approx 0,187.$$

В заключение, необходимо отметить, что квазипотенциальный подход является исключительно эффективным методом описания связанных состояний в квантовой электродинамике. Он совмещает простоту и наглядность трехмерного формализма нерелятивистской квантовой механики с ковариантным аппаратом квантовой теории поля. Этот подход открывает новые возможности для повышения точности расчета величины тонкого сдвига уровней энергии водородоподобных атомов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фаустов Р. Н. Квазипотенциальный метод в задаче об уровнях энергии позитрония : Сообщение – Р-1572. Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1964. 24 с.
2. Тюхтяев Ю. Н. Учет эффектов связанности в позитронии // Теоретическая и математическая физика. 1978. Т. 36, № 2. С. 264–270.
3. Нюнько Н. Е., Тюхтяев Ю. Н. Квазипотенциальный подход к расчету диаграмм однофотонного обмена с поляризационным оператором // Теоретическая и математическая физика. 1972. Т. 12, № 1. С. 56–63.
4. Нюнько Н. Е., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. Исследование некоторых логарифмических вкладов  $\sim \alpha^6 \ln \alpha$  в сверхтонкое расщепление основного уровня позитрония // Ядерная физика. 1979. Т. 30, вып. 2(8). С. 457–464.
5. Fell R. N. Order  $\alpha^4 \ln \alpha^{-1} f_{\text{Ryd}}$  Correction to the  $n = 1$  and  $n = 2$  Energy Levels of Positronium // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68, № 1. P. 25–28.
6. Mohr P. CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2010 // Rev. Modern Phys. 2012. Vol. 84, № 4. P. 1527–1605.
7. Eides M., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Physics Reports. 2001. Vol. 342, № 2. P. 63–261.
8. Salpeter E. E. Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms // Phys. Rev. 1952. Vol. 87, № 2. P. 328–343.
9. Fulton T., Martin P. C. Two-Body System in Quantum Electrodynamics. Energy Levels of Positronium // Phys. Rev. 1954. Vol. 95, № 3. P. 811–822.

10. *Grotch H., Yennie D. R.* Effective Potential Model for Calculating Nuclear Corrections to the Energy Levels of Hydrogen // *Rev. of Modern Phys.* 1969. Vol. 41, № 2. P. 350–374.
11. *Нюнько Н. Е., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* Влияние движения ядра на тонкую структуру водорода : Сообщение – P2-7493. Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1973. 16 с.
12. *Бойкова Н. А., Клещевская С. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* К вопросу о логарифмических по отношению масс частиц вкладов в тонкий сдвиг  $S$ -уровней энергии водородоподобных атомов в пятом порядке по константе тонкой структуры // *Ядерная физика.* 2004. Т. 67, № 3. С. 548–556.
13. *Bodwin G. T., Yenie D. R.* Hyperfine Splitting in Positronium and Muonium // *Physics Reports (Section C of Physics Letters).* 1978. Vol. 43, № 6. P. 267–303.
14. *Fell R. N.* Single Transverse Photon Contribution to the  $2S$  Energy Level of Positronium. Waltham : Brandeis University, 1992. 40 p.
15. *Parthey C. G., Matveev A., Alnis J., Bernhardt B., Beyer A., Holzwarth R., Maistrou A., Pohl R., Predehl K., Udem T., Wilken T., Kolachevsky N., Abgrall M., Rovera D., Salomon C., Laurent P., Hänsch T. W.* Improved Measurement of the Hydrogen  $1S$ – $2S$  Transition Frequency // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, № 20. P. 203001-1–203001-5.
16. *Бойкова Н. А., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* О вкладах порядка  $\alpha^6 \ln(m_1/m_2)$  в тонкий сдвиг  $S$ -уровней энергии мюония // *Ядерная физика.* 1998. Т. 61, № 5. С. 866–870.
17. *Бойкова Н. А., Клещевская С. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* Исследование логарифмических по отношению масс электрона и мюона вкладов в сдвиг  $S$  уровней энергии мюония // *Ядерная физика.* 2003. Т. 66, № 5. С. 925–933.
18. *Бойкова Н. А., Клещевская С. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* К вопросу о влиянии движения ядра на тонкую структуру водородоподобного атома с различными массами частиц // *Теоретическая и математическая физика.* 2006. Т. 149, № 3. С. 325–338.
19. *Бойкова О. А., Клещевская С. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* Особенности квазипотенциального подхода к исследованию высших по константе тонкой структуры поправок к тонким сдвигам уровней энергии водорода // *Ядерная физика.* 2010. Т. 73, № 6. С. 1024–1032.
20. *Churochkina S. V.* Higher in the mass ratio contributions to the fine shift of  $S$  energy levels in the hydrogen-like atoms // *Тр. XVIII междунар. науч. конф. молодых учен. и спец. к 105-летию Н. Н. Боголюбова (ОМУС-2014).* Дубна : ОИЯИ, 2014. С. 279–283.
21. *Удалова А. А., Чурочкина С. В.* Логарифмические по отношению масс частиц поправки в тонкий сдвиг  $S$  уровней энергии водородоподобных атомов от диаграммы параллельного обмена одним кулоновским и одним поперечным фотонами // *Когерентная оптика и оптическая спектроскопия : XVIII междунар. молодежная науч. шк., 27–29 октября 2014 г. : сб. ст. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 194–197.*